PROBABILIDAD EN EL CAMINO DE UNA HORMIGA: UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA CON USO DE METÁFORAS

Gamaliel Cerda-Morales
Universidad Austral de Chile

Resumen: Basado en la teoría de Lakoff y Núñez (2000) sobre "¿De dónde vie¬nen las matemáticas?", este trabajo muestra algunas reflexiones sobre los fenó¬menos relacionados con el uso de metáforas en el aprendizaje de las matemáticas. En particular, se propone un ejemplo concreto de modelización matemática que permite explicar cómo puede sustentarse la construcción del concepto "probabilidad" mediante el uso de metáforas que existen en el discurso del profesor.

Educación, matemáticas, metáforas, ciencias cognitivas, modelización

INTRODUCCIÓN

La teoría sobre "¿De dónde vienen las matemáticas?", propuesta por Lakoff y Núñez (2000), hace énfasis en el estudio de los procesos cognitivos que ponen en juego quienes aprenden las matemáticas. La principal tesis que construyen los autores afirma que el origen de las estructuras matemáticas que construyen las personas, y también las que se construyen en instituciones, se encuentran en los procesos cognitivos cotidianos como son la percepción, la memoria y el pensamiento metafórico. Según los autores, dichos procesos permiten explicar cómo la construcción de los objetos matemáticos está sostenida por la forma en que se relacionan el cuerpo humano y los objetos de la vida cotidiana.

Desde lo abstracto, las metáforas se caracterizan por construir un puente conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite proyectar propiedades del dominio de partida en el de llegada. Soto-Andrade (2006) pone énfasis en el tránsito del modo cognitivo verbal-secuencial, dominante en la enseñanza de la matemática, a otros modos cognitivos menos habituales, eventualmente no verbales y no secuenciales, que deben ser en medida estimulados en el aprendizaje actual de las matemáticas. Se propondrá un ejemplo en este trabajo con el fin de evidenciar que las metáforas crean una cierta conexión que permite que se trasladen una serie de características y estructuras desde un dominio concreto a otro más abstracto. Primero, asumimos la interpretación de la metáfora como la comprensión de un dominio en términos de otro y proponemos un ejemplo concreto de modelización que permite conocer la naturaleza del concepto probabilidad y abordar su enseñanza en la educación secundaria (16-17 años) mediante el uso de metáforas en el discurso del profesor.

METÁFORAS CONCEPTUALES

Nuestra representación concreta del mundo está siempre influida por las metáforas que inyectamos en él, casi siempre de una manera inconsciente (Acevedo, 2005). La mayor parte de los seres humanos conceptualizamos cosas abstractas en términos de cosas concretas que tenemos a la mano. Una posible explicación de estas metáforas, llamadas metáforas conceptuales, es que se sustentan en las experiencias que vive nuestro cuerpo para relacionarse con su entorno físico y cultural. En este sentido, Lakoff y Núñez (2000) distinguen dos tipos de metáforas que se observan comúnmente en matemáticas y cuyo dominio de llegada podría estar dentro o fuera de ellas. Las metáforas de anclaje (*grounding metaphores*) son las que tienen su dominio de partida dentro de las matemáticas, pero su dominio de llegada fuera de ellas. Mientras que las metáforas de vinculación (o *linking metaphores*) tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas.

PROPUESTA DE METÁFORAS EN LA ENSEÑANZA DE PROBABILIDADES

La probabilidad es esencial para preparar a los estudiantes, puesto que el azar y los fenómenos aleatorios impregnan nuestra vida y nuestro entorno (Bennet, 1998). Por otro lado, la cultura en probabilidad (Gal, 2005) requiere no sólo conocimientos, sino actitudes que lleven a los estudiantes a interesarse por mejorar su conocimiento, incluso finalizado su aprendizaje en la escuela o universidad. Proponemos la siguiente situación: Una hormiga se pasea alegremente por un tetraedro de alambre, eligiendo, cada vez que llega a un vértice, cualquiera de las tres aristas a las que está conectado, con igual probabilidad.

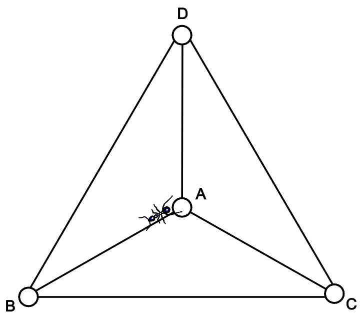

Figura.1. La hormiga en los vértices del tetraedro regular.

Si la hormiga se encuentra inicialmente en el vértice A del tetraedro (como indica la figura 1), ¿dónde estará después de recorrer una arista, dos aristas, tres aristas? ¿Dónde estará después de recorrer m aristas? ¿Dónde estará al cabo de recorrer muchísimas aristas?

Soto-Andrade (2007) se refiere a las metáforas de los paseos al azar para un polígono regular (específicamente un triángulo equilátero). Utilizando la notación de este autor, este trabajo generaliza los paseos o caminatas a un poliedro regular en tres dimensiones, evidenciando ciertas variantes que, desde el discurso del profesor, podrían mejorar la enseñanza-aprendizaje del concepto probabilidad. A continuación, los abordajes metafóricos de nuestra problemática:

La metáfora *salomónica* ve a la hormiga partida en tres porciones en el primer paso, donde cada tercio de hormiga aterriza en uno de los tres vecinos inmediatos, y así en cada paso de manera sucesiva. Van apareciendo así pedacitos de hormiga en cada vértice del tetraedro, que podemos ir añadiendo fácilmente paso a paso, para calcular la porción de hormiga presente en cada vértice después de m caminatas. Nótese que esta metáfora facilita el descubrimiento de la analogía entre el paseo de la hormiga y la evolución de un mercado de consumidores (en iguales condiciones) disputado por cuatro productores. En este caso, la probabilidad de encontrar a la hormiga en cierto vértice resulta ser la parte del mercado controlada por un productor.

La metáfora *hidráulica* ve el cálculo de las probabilidades en cuestión como el flujo o escurrimiento de un litro de fluido probabilista por una red de mangueras, con repartición equitativa en cada bifurcación. Así, la repartición de un litro de jugo de naranja entre cuatro personas no se trata de una metáfora de los paseos al azar, sino más bien de una representación concreta de éste.

La metáfora *frecuentista* ve un enjambre de hormigas que parte del vértice dado y se divide en tres partes iguales entre los tres vecinos, cada vez. Si se considera m = 8, por ejemplo, astutamente soltamos 38 = 6 561 hormigas, que se irán repartiendo por tercios en los vértices del tetraedro. Basta ir registrando la cantidad de hormigas que van llegando a cada vértice hasta la octava bifurcación. El porcentaje de hormigas que llegó a cada vértice da entonces la probabilidad de presencia de la hormiga aleatoria original en ese vértice, al cabo de la octava caminata.

Finalmente, en la metáfora *platónica*, que es cuando se lanza una moneda de tres caras (si existiese una), donde cada cara cae una vez con igual probabilidad, la hormiga tira una moneda de tres caras para elegir el camino que tomará en el tetraedro. Así, las probabilidades se asignan o calculan como frecuencias relativas de una estadística platónica.

Si el profesor plantea en su discurso un tipo de metáfora salomónica o hidráulica, podría inducir al alumno a entender la probabilidad como una parte de la hormiga determinada sobre los vértices en el camino que recorre o parte de un fluido que transita por una red de mangueras. Palabras como "la hormiga se particiona", "el líquido se reparte de manera equitativa" pueden producir este efecto en el alumno. Para Lakoff y Núñez (2000, p. 38) esta es una poderosa metáfora utilizada muy a menudo por los profesores en todos los niveles de enseñanza. En dicha metáfora se sugiere una organización espacio-temporal, se tiene un origen ("de"), un camino ("pasa por", "aquí", "en su caminata"), y un fin ("a", "hasta", "dónde estará") y además se contempla algo que se mueve y que se puede localizar en un momento dado (los vértices en el camino).

EL PAPEL DE LA METÁFORA EN LA NEGOCIACIÓN DE SIGNIFICADOS

En su discurso, el profesor tiene por objetivo recordar el concepto "punto de partida" y los posibles caminos por seguir desde ese punto de partida. En el paseo al azar, el profesor propone un primer ejemplo breve con el uso de una moneda; en este sentido, el profesor introduce la formulación: la probabilidad de obtener cara o sello es la misma. Esta formulación resulta más operativa para el cálculo de una probabilidad, ya que facilita entrar en un "juego de lenguaje" que permite llegar a un consenso sobre cuáles son las reglas del juego. Un caso especial resulta si ya no tenemos una moneda y el dominio de aplicación se incrementa en tres posibles opciones.

A continuación, algunas indicaciones que podrían orientar el discurso del docente al tratar esta problemática en el aula, con ella se pone en juego el siguiente lenguaje:

Introducción de un elemento genérico. El profesor introduce el elemento genérico *hormiga* sobre la cual se realizarán las operaciones indicadas en la formulación del enunciado, mediante la frase "camina a cualquiera de las tres aristas a las que está conectada con igual probabilidad" (señalando los caminos desde el vértice A del tetraedro con el dedo), y después dice "¿qué ocurre en la primera caminata?" y espera que los alumnos mentalmente encuentren los valores para los cuales se pueden realizar las operaciones indicadas en la formulación del enunciado.

Consenso sobre el rango de valores del elemento genérico. Los alumnos podrían formular hipótesis sobre el dominio hasta llegar a un consenso que es aceptado por todos y, sobre todo, por el profesor. En este caso, los alumnos podrían decir que "todos tienen probabilidad 1/3 menos el vértice A que tiene probabilidad 0" y el profesor da por buena esta afirmación.

En la segunda parte, el profesor puede reproducir el mismo juego de lenguaje con algunas variantes. La primera variante es que, en este caso, el elemento genérico está en un punto de partida distinto. En efecto, en este caso el profesor escribe 1/3 en cada vértice, salvo en A, donde escribe 0, y espera que los alumnos mentalmente apliquen la técnica de: *1)* pensar en nuevos puntos de partida, *2)* graficar los resultados en un cuadro según la caminata observada, *3)* observar que en el cuadro hay datos que se repiten y deben omitirse (la probabilidad de estar en los vértices B, C y D es la misma), y *4)* que este razonamiento es válido para cualquier punto de partida. La segunda variante es que, cuando los alumnos responden "parece que tiene mayor probabilidad de estar en A", el profesor considera ambigua esta respuesta para llegar a un consenso y decide intervenir pidiendo a los alumnos que centren su atención en los demás vértices, omitiendo cierta afirmación a priori desde el vértice A.

Es importante remarcar que el consenso al que se llega podría estar expresado en términos metafóricos, donde los alumnos y el profesor utilizan la expresión "tres vértices o nodos tienen igual probabilidad", los alumnos lo hacen oralmente, mientras que el profesor, a esta expresión oral, asocia la representación del cuadro originado del enunciado y también la gesticulación sobre la parte externa de la figura 1, moviendo la mano desde el origen a los demás vértices; con ello hace corporal un conocimiento previo, las otras tres opciones son iguales. Así, el movimiento de las manos en el profesor podría dar a entender una respuesta errada por parte del alumno; es decir, el vértice A tiene menos probabilidad de albergar a la hormiga, ya que me "trasladé" desde A. Por ejemplo, Marghetis y Núñez (2013) estudian el movimiento ficticio (o *fictive motion*) presente en la enseñanza del concepto "continuidad" en matemáticas, poniendo énfasis en las consecuencias que puede traer el acto corporal en el actuar de quien lo enseña.

COMENTARIOS

La combinación del lenguaje dinámico y la distribución del mercado entre cuatro productores permiten entender el dominio del enunciado como el resultado de una distribución que verifica el principio de repartición equitativa (lo que matemáticamente se entiende como equiprobables). Según Lakoff y Núñez (2000, p. 158), entendemos este caso de paseo al azar como resultado de un movimiento sin fin que tiene un principio gracias a que solemos proyectar metafóricamente sobre este tipo de procesos nuestro conocimiento de los procesos cotidianos, que en su mayoría tienen principio y fin. Más aún, los procesos que continúan indefinidamente se conceptualizan metafóricamente como que tienen un final y un último resultado. Para los autores, este tipo de conceptualización es el resultado de la aplicación de lo que ellos llaman la metáfora básica del infinito. En mi caso, y por experiencia empírica, he decidido llamarla metáfora del juicio final. Presentamos este problema de paseos al azar como mecanismo de aprendizaje y enseñanza en educación secundaria. No tan sólo como forma discreta de analizar un problema de tipo probabilístico (azaroso a priori), sino como herramienta matemática para verificar conjeturas que suelen ser advertidas en este tipo de contenidos en la enseñanza tradicional, ahora mediante el uso de metáforas.

Referencias

Acevedo, I. (2005). Metaphors in mathematics classrooms: Analyzing the dynamic process of teaching and learning to graph function, en *Proc. cerme 4.* Recuperado de http://ermeweb.free.fr/CERME4/

Bennet, D. J. (1998), *Randomness*, Nueva York, Cambridge University Press.

Gal, I. (2005). Democratic access to probability: Issues of probability literacy, en G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, Nueva York, Springer, pp. 39-63.

Johnson, M. y G. Lakoff (2003), *Metaphors we live by*, Nueva York, The University of Chicago Press.

Lakoff, G. y R. Núñez (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Nueva York, Basic Books.

Marghetis, T. y R. Núñez (2013). The motion behind the symbols: A vital role for dynamism in the conceptualization of limits and continuity in expert mathematics, *Topics in Cognitive Science,* vol. 5, núm. 2, pp. 299-316.

Soto-Andrade, J. (2006). Un monde dans un grain de sable: Métaphores et analogies dans l'apprentissage des mathématiques, *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, vol. 11, pp. 123-147.

Soto-Andrade, J. (2007). "La cognición hecha cuerpo florece en metáforas…", en A. Ibañez y D. Cosmelli (eds.), *Nuevos enfoques de la cognición. Redescubriendo la dinámica de la acción, la intención y la intersubjetividad*, Santiago de Chile, Universidad Diego Portales, pp. 71-90.